

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

1. a) $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)} = (-1)^2 = 1.$

b) Avem $\sigma^3 = e$, unde e este permutarea identică. Evident, σ comută cu permutările e, σ, σ^2 .

Se arată, prin calcul direct, că σ nu comută cu celelalte 3 permutări din S_3 .

c) Dacă $x \in S_3$ este o permutare impară (deci o transpoziție), evident, $x^2 = e \neq \sigma$.

Obținem unica soluție $x = \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

2. a) Se verifică prin calcul.

b) Se arată că înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe G . Se verifică axiomele grupului abelian.

Elementul neutru este matricea $X(0)$, iar simetrica lui $X(a) \in G$ este matricea $X\left(-1 + \frac{1}{a+1}\right) \in G$.

c) Se demonstrează prin inducție că

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, X(a_1) \cdot X(a_2) \cdot \dots \cdot X(a_n) = X((a_1+1) \cdot (a_2+1) \cdot \dots \cdot (a_n+1) - 1).$$

Pentru $n = 2009$ și $a_k = k$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, 2009\}$, obținem $t = 2010!$